Hippasos und die irrationalen Zahlen

(von H. Tiex)

Die Entdeckung der irrationalen Zahlen (also der Zahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen) wird heutzutage häufig als Werk der Pythagoräer angesehen. Oft wird speziell Hippasos von Metapont als ihr Entdecker angesehen. Nicht selten finden sich auch genauere Angaben über diese Entdeckung: Hippasos soll sie bei Untersuchungen an regelmäßigen Fünfecken bzw. Pentagrammen gemacht haben (vgl. z. B. Lambacher Schweizer Mathematik 9 NRW von 2009, S. 33). Manchmal findet man sogar die Angabe, Hippasos sei von den Pythagoräern zur Strafe für diese Entdeckung (welche den quasireligiösen Glauben der Gemeinschaft daran, dass sich alles in der Welt mit Hilfe von natürlichen Zahlen und ihren Verhältnissen beschreiben lässt, angriff) ertränkt worden (vgl. dazu A. Martinez: The Cult of Pythagoras. Math and Myths, Pittsburgh 2012, S. 16ff.). Diese weit verbreitete Geschichte soll im Folgenden genauer untersucht werden.

Der Pythagoräer Hippasos

Hippasos war tatsächlich ein früher Pythagoräer, der vermutlich irgendwann im fünften vorchristlichen Jahrhundert lebte. Eine genauere Datierung ist nicht möglich; viele Historiker ordnen ihn dem Anfang des Jahrhunderts zu und sehen in ihm einen jüngeren Zeitgenossen des Pythagoras. Andere Historiker weisen ihn jedoch eher der Mitte des Jahrhunderts oder einer noch späteren Zeit zu. Über das Leben und das Wirken des Hippasos sind kaum Aussagen möglich. Er stammte möglicherweise aus Metapont (der Stadt, in der Pythagoras vermutlich um 500 v. Chr. starb, und nach der er oft als „Hippasos von Metapont“ bezeichnet wird) oder aus Kroton. Der Philosoph Aristoteles (um 350 v. Chr.) sah in ihm einen Philosophen, der gelehrt habe, dass das Feuer das grundlegende Element der Welt sei. Andere Zeugnisse berichten davon, dass er akustische Versuche gemacht habe, um die von den Pythagoräern bereits entdeckten Zahlenverhältnisse hinter harmonisch klingenden Töne weiter zu untersuchen. Er habe vier Bronzescheiben von identischer Größe aber unterschiedlicher Dicke (die sich im Verhältnis 1: 4/3 : 3/2 : 2 befanden) angeschlagen, um harmonische Töne zu erzeugen. Er hat keine eigenen Werke geschrieben und anders als bei vielen anderen Pythagoräern gibt es auch keine pseudopythagoräischen Schriften, die angeblich von ihm stammen.

Verschiedene späte Quellen scheinen darauf hinzudeuten, dass Hippasos innerhalb der Pythagoräer irgendwann zu einer umstrittenen Gestalt und Persona non grata wurde. Clemens von Alexandria berichtet um 200 n. Chr., dass ein Pythagoräer namens „Hipparchos“ bisher geheim gehaltene Lehren des Pythagoras in schriftlicher Form veröffentlicht habe und wegen dieses Verrats aus der pythagoräischen Gemeinschaft ausgeschlossen worden sei. Man habe für ihn ein Grabmonument errichtet, als sei er bereits tot. Iamblichos berichtet im dritten nachchristlichen Jahrhundert, dass Hippasos behauptet habe, dass er die Konstruktion des einer Kugel einbeschriebenen Dodekaeders[1] entdeckt habe, obwohl diese von Pythagoras selbst stamme. Er habe damit die Götter gegen sich aufgebracht und sei bei einem Schiffsunglück umgekommen. (Vgl. Vita Pythagorica 88). An einer anderen Stelle erzählt er, dass Hippasos sich beim ersten

1 Ein Dodekaeder ist ein Körper, dessen Oberfläche aus zwölf kongruenten regelmäßigen Fünfecken besteht. Er gehört zu den fünf sogenannten Platonischen Körpern.

antipythagoräischen Aufstand um 500 v. Chr. auf die Seite der Gegner gestellt habe (Vita Pythagorica 254). Vom selben Autor stammt die Angabe, dass Hippasos eine Rolle bei der Spaltung der Pythagoräer in Akousmatikoi und Mathematikoi gespielt habe (Vita Pythagorica 81). Der Hintergrund all dieser Vorwürfe ist unklar.

Hippasos als Entdecker der irrationalen Zahlen

Hippasos wurde bis ins dritte nachchristliche Jahrhundert nicht mit den irrationalen Zahlen in Verbindung gebracht. Die Entdeckung der ersten irrationalen Zahlen wurde über Jahrhunderte hinweg mit keinem bestimmten Mathematiker verbunden. Verschiedene relativ späte Quellen berichten allerdings, dass es Pythagoräer gewesen seien. Eine erste indirekte Verbindung wurde erst von Iamblichos in seinem Werk De Vita Pythagorica hergestellt. Zwar findet sich in diesem Buch keine Aussage, die Hippasos direkt mit den irrationalen Zahlen verbinden würde, aber es existieren einige Mitteilungen, die eine solche Verbindung mehr oder weniger andeuten. So berichtet er, dass derjenige bei einem Schiffsunglück ertrunken sei, der der Außenwelt das Wissen über die Konstruktion des Dodekaeders verraten habe (Vita Pythagorica 247). Außerdem schreibt er, dass derjenige bei einem Schiffsunglück umgekommen sei, der den Nichteingeweihten das Wissen über die Existenz irrationaler Zahlen geoffenbart habe (Vita Pythagorica 247). Und er fügt schließlich auch hinzu, dass derjenige aus der Gemeinschaft ausgeschlossen und wie tot behandelt worden sei, der der Außenwelt das Wissen über das Vorhandensein irrationaler Zahlen verraten habe (Vita Pythagorica 246). Alle diese Nachrichten lassen sich mit den weiter oben bereits erwähnten Informationen des Iamblichos über Hippasos als Hinweis darauf lesen, dass Hippasos zumindest das Wissen über die irrationalen Zahlen veröffentlicht hat. Aufbauend auf diese Angaben ging man irgendwann in der Zeit nach Iamblichos dazu über, Hippasos als den Entdecker der irrationalen Zahlen anzusehen. Dadurch entstand das Gerüst für die eingangs geschilderte Erzählung, die Hippasos als den Entdecker der irrationalen Zahlen sieht.

Wie oben beschrieben ist die Quellengrundlage für eine Identifizierung des Hippasos als Entdecker der irrationalen Zahlen allerdings äußerst schwach und damit mit hoher Wahrscheinlichkeit falsch. Einerseits schrieb Iamblichos mehr als ein halbes Jahrtausend nach der Lebenszeit des Hippasos, ohne dass dieser in der vorangegangenen Zeit irgendwie mit den irrationalen Zahlen verbunden worden wäre. Andererseits sind die Aussagen des Iamblichos unklar und verwirrend. Man könnte sie auch als Hinweis darauf deuten, dass Hippasos irgendwie mit dem Dodekaeder verbunden ist.

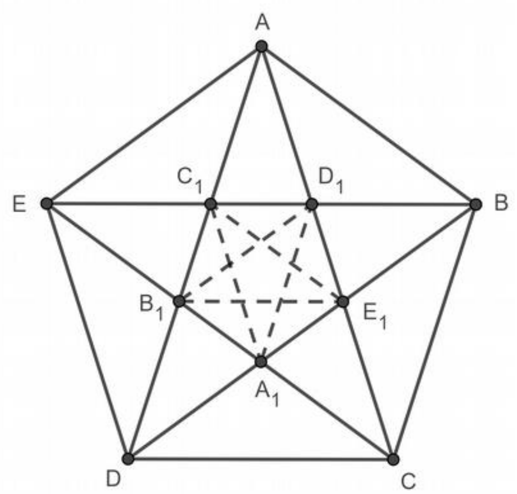
Hippasos und das reguläre Fünfeck

Die Erzählung über die angebliche Entdeckung der Irrationalität durch Hippasos wurde im 20. Jahrhundert mit einem neuen Element ausgebaut. Man fing nun nämlich an, diese Entdeckung mit dem regelmäßigen Fünfeck zu verbinden. Eine große Bedeutung hatte dabei vermutlich der deutsche Altphilologe Kurt von Fritz (1900-1985), der von 1936 bis 1954 in den USA wirkte. Er veröffentlichte im Jahre 1945 einen mit „ The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum“ betitelten Aufsatz, der später auch ins Deutsche übersetzt wurde. In diesem Aufsatz schreibt von Fritz, dass Hippasos der Entdeckung der irrationalen Zahlen durch Untersuchungen am regelmäßigen Fünfeck (bei dem das Verhältnis der Seiten zu den Diagonalen eine irrationale Zahl ist) gelungen sei. Diese Position setzte sich anschließend in großen Teilen der Fachwelt und der Öffentlichkeit durch.

Kurt von Fritz begründete seine Position damit, dass regelmäßige Fünfecke den Pythagoräern bekannt gewesen sein müssten (nach einer relativ späten Quelle sei das Pentagramm sogar ein Erkennungszeichen der Gemeinschaft gewesen) und dass die Entdeckung an dieser Figur mathematisch vergleichsweise einfach sei. In seinem Aufsatz versucht er zudem die genaue Vorgehensweise des Hippasos zu rekonstruieren.

Bevor wir diesen Rekonstruktionsversuch betrachten können, müssen wir allerdings noch kurz untersuchen, wie die alten Griechen die Irrationalität von Zahlen wahrgenommen haben. Die Irrationalität wurde als „Inkommensurabilität“ definiert: Die Griechen hatten bemerkt, dass „normale“ Zahlen stets zueinander kommensurabel waren, d. h. zwei natürliche Zahlen a und b ließen sich stets als Vielfache einer weiteren natürlichen Zahl c auffassen. Die beiden Zahlen a und b standen dann in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander. So kann man beispielsweise die Zahlen 6 und 8 als 6=3 mal 2 und 8=4 mal 2 schreiben; die beiden Zahlen stehen also im Verhältnis 3:4. Die dritte Zahl c (das gemeinsame Maß der beiden Zahlen a und b) wurde in der Antike mit dem Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers bestimmt. Bei diesem Verfahren wird zunächst die kleinere Zahl von a und b von der größeren abgezogen. Anschließend haben wir das Ergebnis und den vorherigen Subtrahenden. Wieder wird die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert. Wir betrachten wieder das Ergebnis und den vorherigen Subtrahenden. Wieder wird die kleinere Zahl von der größeren abgezogen. Das Verfahren wird soweit weitergeführt, bis als Ergebnis die Zahl Null erscheint. Dann war der unmittelbar vorher benutzte Subtrahend der größte gemeinsame Teiler bzw. das gemeinsame Maß. Das kleinste mögliche gemeinsame Maß ist die Zahl 1. Das bedeutet beispielsweise für die Zahlen 12 und 8: 12 – 8 = 4 und wir haben 4 und 8; 8 – 4 = 4 und wir haben 4 und 4; 4 – 4 = 0 und 4 muss der größte gemeinsame Teiler bzw. das gemeinsame Maß der beiden Zahlen 12 und 8 sein. Es gilt 12 = 3 · 4 und 8 = 2 · 4 und die beiden Zahlen stehen im Verhältnis 3:2. Wenn eine der beiden Zahlen a und b irrational ist, so lässt sich kein gemeinsames Maß finden. Andernfalls wäre es möglich irrationale Zahlen als Brüche zu schreiben. Wenn beispielsweise a (was keine irrationale Zahl ist) und $\sqrt{2}$ zueinander kommensurabel wären, so würde gelten $\sqrt{2}=nc$ und $a=mc$ mit a, m und n als natürlichen Zahlen. Das würde bedeuten: $\frac{\sqrt{2}}{a}=\frac{nc}{mc}=\frac{n}{m}$ und für $\sqrt{2}$ würde gelten: $\sqrt{2}=\frac{an}{m}$.

Nun zum Rekonstruktionsversuch: Von Fritz betrachtet ein regelmäßiges Fünfeck (siehe die Abbildung unten), in das die Diagonalen (also ein Pentagramm) eingetragen wurden. Im Inneren entsteht erneut ein regelmäßiges Fünfeck, in das man die Diagonalen eintragen kann. Er setzt voraus, dass Hippasos bekannt war, dass die Dreiecke AEB_{1}- und B_1DE_1 gleichschenklig sind (zum Beispiel durch eine Betrachtung der Winkel in der Figur). Zu zeigen ist nun, dass die Längen der Strecken AE und AD nicht zueinander kom-



In einem regelmäßigen Fünfeck sind die Seiten (z. B. AE) und die Diagonalen (z. B. AD) zueinander in einem inkommensurablen Verhältnis. Ihr Verhältnis ist das goldene Verhältnis. Es gilt: $\frac{AD}{AE}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

mensurabel sind. Der Euklidische Algorithmus beginnt mit der Subtraktion AD – AE. Da AE ein Schenkel in einem gleichschenkligen Dreieck ist, ist es gleich AB_1. Daher gilt: AD – AE = AD – AB_1 = B_1D. Als neue Größen erhalten wir AB_1 und B_1D. B_1D ist aber genau so lang wie AC_1. Damit ergibt sich als nächster Schritt: $AB_1 – B_1D = AB_1 – AC_1 = C_1B_1$. Als neue Größen erhalten wir B_1D und C_1B_1. B_1D ist aber eine Seite in einem gleichschenkligen Dreieck und gleich B_1E_1. Wir erhalten also anders formuliert als neue Größen B_1E_1 und C_1B_1. Es handelt sich um die Seite und die Diagonale des inneren regelmäßigen Fünfecks. Daraus folgt, dass sich die oben bereits aufgelisteten Schritte analog wiederholen. Der Algorithmus kann zu keinem Ergebnis führen und läuft ad infinitum weiter.

Der oben vorgestellte Rekonstruktionsversuch setzt in der Tat nur Wissen voraus, dass den frühen Pythagoräern möglicherweise bekannt gewesen ist. Allerdings widerspricht er der Quellenlage: Dort findet sich keinerlei Hinweis darauf, dass die Entdeckung auf diese Art und Weise geschehen ist. Es gibt im Gegenteil in den Schriften der Philosophen Platon und Aristoteles (4. Jahrhundert v. Chr.) Andeutungen, dass die irrationalen Zahlen durch eine Untersuchung der Kommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrats entdeckt wurden. Und manches weist auf eine Benutzung der Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen statt des Euklidischen Algorithmus hin. Die Idee, dass die Entdeckung der irrationalen Zahlen anhand des regelmäßigen Fünfecks gelang, ist also mit hoher Wahrscheinlichkeit falsch. Der Rekonstruktionsversuch von Fritzs ist im Grunde eine reine Spekulation. Und die eingangs beschriebene Erzählung über die Entdeckung der irrationalen Zahlen ist mit hoher Wahrscheinlichkeit falsch.

Fortsetzung folgt ...

Quellen (in Auswahl)

P. Rousell (Hrsg.): Complete Pythagoras, Online-Veröffentlichung o. J.: https://archive.org/details/CompletePythagoras/page/n7 (insbesondere die darin enthaltene „Vita Pythagorica" von Iamblichus)

Literatur (in Auswahl)

H. Hirscher: Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl, Wiesbaden 2012.

A. Martinez: The Cult of Pythagoras. Math and Myths, Pittsburgh 2012.

L. Zhmud: Pythagoras and the Early Pythagoreans, Oxford 2012 (deutsche Ausgabe 1997).

K. von Fritz: The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum, in: Annals of Mathematics 46 No. 2 (1945), S. 242-264.

K. von Fritz: Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont, in: K. von Fritz: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft, Berlin u. a. 1971, S. 545-575.

J. Havil: The Irrationals. A Story of the Numbers You Can`t Count On, Princeton u. Oxford 2012.

Bildnachweis

Das Bild des regelmäßigen Fünfecks wurde vom Autor mit Hilfe von Geogebra selbst erstellt.

Autor

Helmut Tiex (Moderator im Mathe-Treff der Bezirksregierung Düsseldorf)